Principios de cálculo de piezas y selección de componentes de máquinas

Ing. Horacio Nieco

Programa del curso

<u>Principio de cálculo de piezas y selección de elementos de máquina I</u>

<u>Objetivo:</u> permitirles a los participantes identificar esfuerzos a los que se encuentran sometidas piezas o componentes de máquina, reducir los esfuerzos de manera de poder calcular las secciones mínimas resistentes, dentro de criterios globales en los que se haya conceptualizado la máquina o conjunto que forman.

<u>Desarrollo</u>

I- Elementos a considerar en el cálculo de resistencias de materiales aplicado a componentes mecánicos.

1) Limitaciones geométricas y tecnológicas.

   a) Duración
   b) Obsolescencia
   c) Normalización y unificación
   d) Costo

2) Esfuerzos predominantes y características.

   a) Fuerza
   b) Cupla
   c) Momento flexor. Elástica
   d) Tensiones normales y tangenciales. Momento torsor
   e) Momentos de inercia y centrífugo. Radio de giro

II- Criterio general de cálculo

1) Relación matemática general definida entre esfuerzo y deformaciones.
2) Ley de Hooke.
3) Selección de coeficiencia de seguridad.

III- Definición conceptual y cálculo para piezas sometidas a esfuerzos simples.

1) Introducción
2) Tracción
3) Compresión
4) Corte
5) Flexión. Módulo resistente a la flexión. Cálculo de la elástica.
6) Torsión. Módulo resistente polar.

IV- Definición conceptual y cálculo para piezas sometidas a esfuerzos compuestos.

1) Tracción y flexión
2) Flexión y torsión
3) Pandeo

V- Cálculo de aplicación en piezas típicas utilizadas en construcciones mecánicas.

1) Cálculo de vigas
2) Cálculo de columnas
3) Cálculo de árboles
4) Barras curvas

VI- Trabajo práctico de aplicación basado en la identificación de esfuerzos, reducción de los mismos y dimensionamiento de las secciones resistentes.

Introducción

El presente trabajo ha sido desarrollado siguiendo como premisa fundamental la elaboración de una guía teórica-práctica que, clarificando conceptos fundamentales de la estática y la resistencia de materiales (sin adentrarse en el análisis de las distintas teorías basadas en el estudio tensional diferencial), permita utilizar fórmulas y criterios que posibiliten el dimensionamiento adecuado de piezas, contemplando criterios de costo, diseño y armonía de conjunto.

I- Elementos a considerar en el cálculo de resistencia de materiales, aplicados a componentes mecánicos.

La resistencia de materiales se aboca al cálculo de las resistencia mecánica, rigidez y estabilidad de las piezas y elementos constructivos, entendiendo por:

- Resistencia mecánicas: la capacidad de absorber esfuerzos sin llegar a la rotura.
- Rigidez: la capacidad de oponerse a las deformaciones.
- Estabilidad: la capacidad de absorber perturbaciones que tiendan a romper el equilibrio.

1) Limitaciones geométricas y tecnológicas.

En muchos casos, el proyectista o quien deba diseñar una pieza, no sólo debe contemplar los aspectos referidos a la resistencia de la pieza a los esfuerzos a los que se encuentra sometida, sino que debe circunscribirse a dimensiones geométricas establecidas y/o a la capacidad tecnológica de fabricar la pieza en tiempo y forma de una manera que su costo sea coherente con el resto del conjunto y su prestación. Con respecto a este punto de vista, cuatro son los aspectos que de una manera accesoria deben contemplarse para que el diseño de las piezas en cuestión sea criterioso. Los mismo son:

a) Duración
b) Obsolescencia
c) Normalización y unificación
d) Costo

1) a) Duración

Llamamos duración al tiempo neto total que la pieza puede funcionar a un régimen nominal, es condiciones normales de explotación y sin reducción significativa de su productividad o de la del conjunto al que pertenece. La duración se limita, entre otras cosas, por:.

- ruptura
- desgaste
- deformaciones
- corrosión

Es útil aclarar que, en aplicaciones industriales, la resistencia mecánica de los materiales no constituye un límite para la duración desde el punto de vista de la ruptura.

En general, el desgaste es el elemento que determina la duración. La forma de minimizar este efecto es a través de las siguientes premisas a tener en cuenta en el diseño:

- bajar la carga específica superficial
- utilizar condiciones óptimas de lubricación
- efectuar tratamientos termoquímicos de endurecimiento superficial
- utilizar sistemas de compensación de alineación
- preservar los conjuntos de polvo y elementos abrasivos

Con lo descrito, puede aumentarse considerablemente la duración de las piezas.

No obstante ello, debe haber un equilibrio entre la inversión o costo de aumento de la vida útil de la pieza y su costo intrínseco, así como debe analizarse y homologarse a valores compatibles, la duración de la pieza y la vida útil del conjunto.

1) b) Obsolescencia

Es la desvalorización de las máquinas y piezas que la componen, aún en condiciones técnicas de seguir utilizándose, a causa de la pérdida relativa de eficiencia respecto de similares productos del mercado que la desplazan.

Si bien en la mayoría de los casos, la innovación tecnológica gradual permite prever la obsolescencia de los equipos y generar los reemplazos adecuados, la aparición repentina de sustitutos con tecnologías ampliamente superadoras, elevan la condición de obsolescencia a punto de inhabilitar el producto completo.

1) c) Normalización y unificación

En el proyecto mecánico, la normalización está referida a la reglamentación de la construcción y las dimensiones de las piezas y subconjuntos, sobre la base de la normativa en vigencia. La unificación consiste en el empleo reiterado de la misma pieza, ligado principalmente a los criterios de reposición universal e intercambio posible.

1) d) Costo

Todo proyecto para ser viable debe ser visto desde el punto de vista técnico-económico, es decir, que siendo capaz de resistir los esfuerzos a los que será sometido, la ecuación costo-prestación se cumpla favorablemente. Para poder efectuar una evaluación adecuada, debe costearse la pieza teniendo en cuenta los siguientes elementos:

- materia prima insumida
- mano de obra necesaria para la transformación
- energía necesaria para la transformación
- amortización de la pieza respecto de la máquina
- costo de dispositivos o tecnologías especiales necesarias para su transformación

2) Esfuerzos predominantes y características.

En esta sección, desarrollaremos los conceptos necesarios para poder identificar las variables que deben manejarse para el dimensionamiento adecuado de las piezas.

Existen elementos externos que, por lo general, son los que generan la perturbación de las piezas, exigiéndolas, por ejemplo, las fuerzas y los pares.

Existen por otra parte, componentes internos que surgen como evidencia de ls solicitaciones actuantes, como son las tensiones y la elástica.

Y, por último, existen variables eminentemente ligadas a la conformación geométrica de las piezas, como pueden ser los momentos centrífugos o de inercia.

A continuación se pondrán de manifiesto cada uno de ellos.

2) a) Fuerza

Es una acción perturbadora del estado de equilibrio del cuerpo que genera por reacción, esfuerzos o fuerzas interiore que se desarrollan para mantener el grado de equilibrio inicial o su posición.

La **carga** es el conjunto de fuerzas aplicadas a un cuerpo. Las cargas pueden ser **estáticas** o permanentes (no varían con el tiempo) o **variables** o dinámicas (van desde 0 hasta un valor máximo).

Pueden ser **alternativas**, o sea, de sentido distinto, pasando de un valor positivo a otro negativo.

Por último, según cómo estén aplicadas, pueden ser **concentradas** o **distribuidas**.

En resumen, las cargas pueden ser:

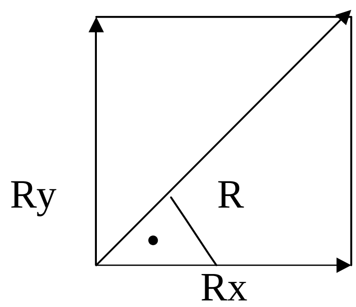
- concentradas
- distribuidas
- permanentes
- estáticas
- dinámicas
- accidentales

En el proyecto mecánico una vez evidenciadas las fuerzas actuantes sobre la pieza a dimensionar, es conveniente reducirlas a dos fuerzas ortogonales. Por lo tanto, sumando vectorialmente las fuerzas, puede obtenerse la resultante, la que a su vez, se descompondrá en una resultante en el eje X y otra en el Y.

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots\ldots + \vec{F}_n$$

$$Rx = R * \cos \bullet$$

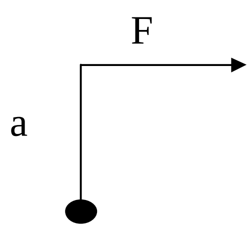
$$Ry = R * \text{sen} \bullet$$



Ya que es mucho más fácil de operar. Para obtener R puede recurrirse a métodos gráficos como el método del paralelogramo o el de la poligonal.

2) b) Cuplas

Una cupla se origina cuando la fuerza no está aplicada sobre el punto de estudio, sino a una distancia a, con lo cual el valor de la cupla M, al cual llamamos momento, será:



$$M = F * a$$

El momento así generado es el producto de la fuerza por un punto elegido como centro de rotación.

Las principales propiedades de las cuplas son:

1- Se pueden trasladar en el plano sin que varíe su efecto.
2- Ídem si se gira.
3- Ídem si se trasladan a un plano paralelo al de su aplicación.
4- Dos cuplas son iguales si sus momentos lo son en magnitud y sentido de giro.

La cupla resultante de varias cuplas es la sumatoria algebraica de las mismas, considerando en su signo, el sentido de giro.

La composición de una fuerza y una cupla da como resultante una cupla.

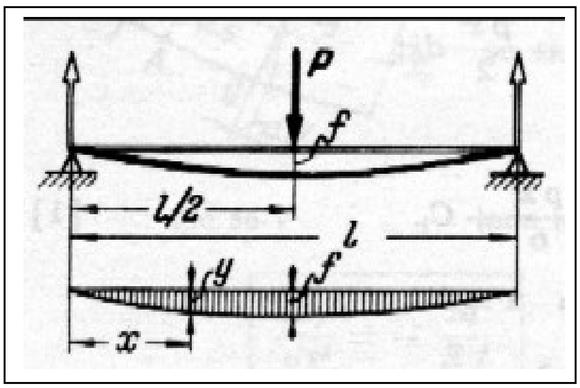
2) c) Momento flexor.

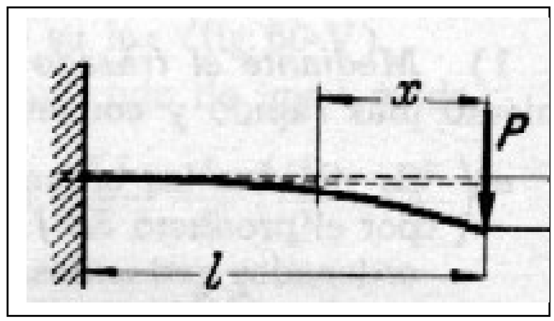
El **momento flexor** es la componente según un plano normal a la sección considerada, del momento con respecto a dicha sección de la resultante de la fuerza situada a la izquierda o a la derecha de la misma, llevando en el primer caso su signo y en el segundo, el signo cambiado.

El cálculo del momento flexor sirve generalmente para calcular las vigas sometidas a flexión. El momento flexor es equilibrado, después de la deformación por ella provocada, por el momento de las fuerzas elásticas o interiores en esa misma sección. Provoca rotaciones laterales, ocasionando la flexión del cuerpo.

Las vigas sometidas a momentos flexores se deforman tomando cierta curvatura, a veces imperceptible.

Cuando una viga se somete a la flexión, una parte de las fibras de la misma han sufrido alargamientos y otras acortamientos**.**





Las fibras contenidas en el plano axial xx, no han sufrido deformación alguna (ni alargamiento ni acortamiento). Ellas se llaman fibras neutras y la sucesión de puntos que las agrupan, forman el eje neutro, siendo éste un eje baricéntrico del sólido.

Cuando la fibra neutra se deforma adquiriendo cierta curvatura que depende de los momentos flexores aplicados, recibe el nombre de curva elástica o **elástica**.

De la elástica es importante determinar:

1- Radio de curvatura.
2- Desplazamiento vertical o flecha.
3- Desplazamiento angular.
4- Ecuación característica.

Si bien los cuatro factores son relevantes, la flecha tiene máxima importancia ya que responde a la necesidad de evitar fisuras o rajaduras en los elementos que soportan la viga, y en cierto grado también, contempla aspectos estéticos.

Las flechas admisibles están normalizadas para construcciones metálicas, siendo los siguientes algunos de los valores recomendables:

- tinglados y galpones: $f < l / 400$
- vigas para entrepisos $f < l / 500$

2) d) Momento torsor.

Cuando las fuerzas exteriores actuantes sobre la sección en estudio se reducen a un par en el plano de dicha sección, el momento generado es llamado momento torsor. Es un esfuerzo característico de ejes rotantes, y la forma de determinar su magnitud es, o bien conociendo la fuerza tangencial aplicada y su diámetro o conociendo la potencia molosa que recibe y a qué velocidad angular gira.

$$Mt = 71620 \frac{N}{n} = Ft * R$$

N = potencia en CV
n = velocidad angular en rpm
Ft = fuerza tangencial en kg
R = radio en cm
Mt = momento torsor en kg/cm

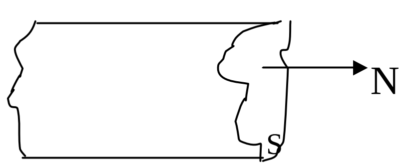
Tensiones

Se denomina tensión a una reacción equivalente a un esfuerzo unitario, lo que implica que se trata de la fuerza que corresponde por unidad de superficie de una reacción perpendicular a la dirección de dicha carga.

Las tensiones pueden ser normales o tangenciales.

Tensiones normales (•)

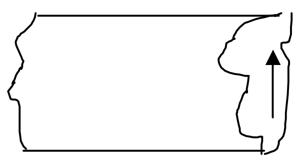
Si N es la fuerza normal a la superficie S, entonces



$$\bullet = \frac{N}{S} \text{ kg / cm}^2$$

Tensiones tangenciales (τ)

Si la fuerza q actúa en el mismo plano de la sección también se produce una tensión, siendo ésta la tensión tangencial



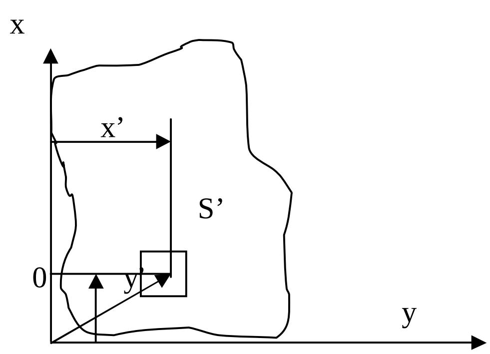
q

$$\tau = \frac{q}{S} \quad kg / cm^2$$

Tiende a hacer rotar al cuerpo respecto del eje X.

2) e) Momento de inercia.

Sea una reacción **S** y dos ejes **x** e **y** de su plano, si se delimita un sector **S’** de esa superficie ubicado a las distancias **x’** e **y’**, se define a **Jxy** como momento de segundo orden de **S’** respecto a **x** e **y** matemáticamente.



$$Jxy = S * x * y \ (cm^4)$$

Al que se llama momento centrífugo de la superficie.
Si se gira uno de los ejes 90º y se ubican coincidentemente, se define **Jx** como

$$Jx = y^2 * S \ (cm^4)$$

Que se define momento de inercia de la superficie respecto al eje x.

Si se efectúa idéntico análisis pero multiplicando la superficie por la distancia ρ desde 0 hasta S', se obtiene

$$J_\rho = \rho^2 * S \quad (cm^4)$$

Al que se denomina momento de inercia polar.
Expresión que puede definirse como

$$i^2 = \frac{J}{S}$$

Determinando a i como radio de giro de la superficie respecto del eje considerado.

Resumiendo: el momento de inercia de una superficie respecto de un eje se puede interpretar como el producto de un área, considerándola concentrada en un punto ubicado a una distancia del eje igual al radio de giro.

Cuando las solicitaciones superan los valores que admiten las secciones normalizadas o se busca optimizar la relación peso – resistencia, se puede recurrir a la combinación de varias secciones de características geométricas conocidas. Para determinar el momento de inercia de la sección resultante, se aplica el teorema de Steiner, que expresa:

$$J_{conjunto} = \Sigma J_i + \Sigma (S_i \, d_i^2)$$

Siendo:

$J_{conjunto}$ = momento de inercia de la sección resultante

J_i = momento de inercia de cada sección i

S_i = área de cada sección i

d_i = es la distancia entre el baricentro del perfil compuesto y la sección Si

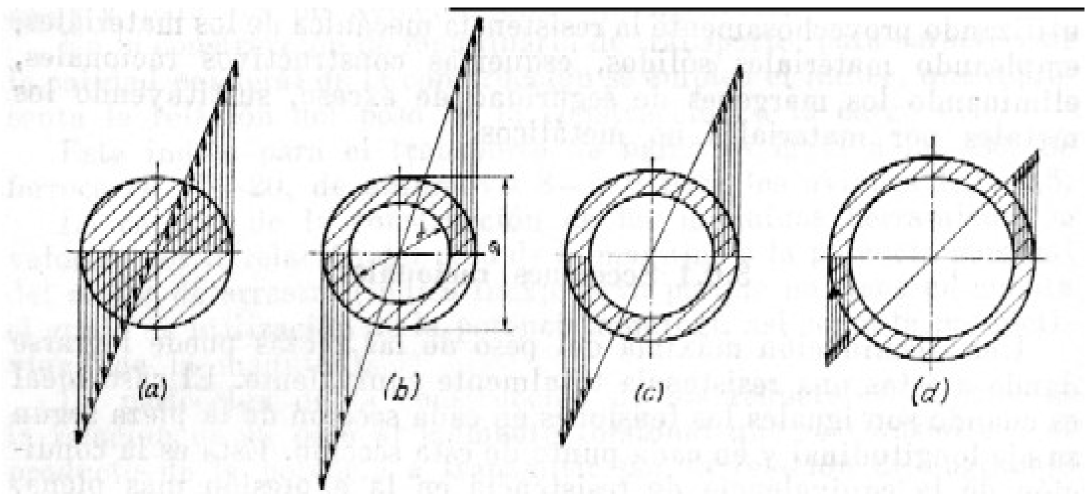
En el caso de esfuerzos como flexión, torsión y estados tensionales complejos, las tensiones se distribuyen en las secciones de manera irregular (a diferencia de la tracción o la compresión).

En estos casos es necesario buscar a igual peso, secciones más resistentes a dichos esfuerzos, mediante la distribución de tensiones proporcionalmente a las áreas.

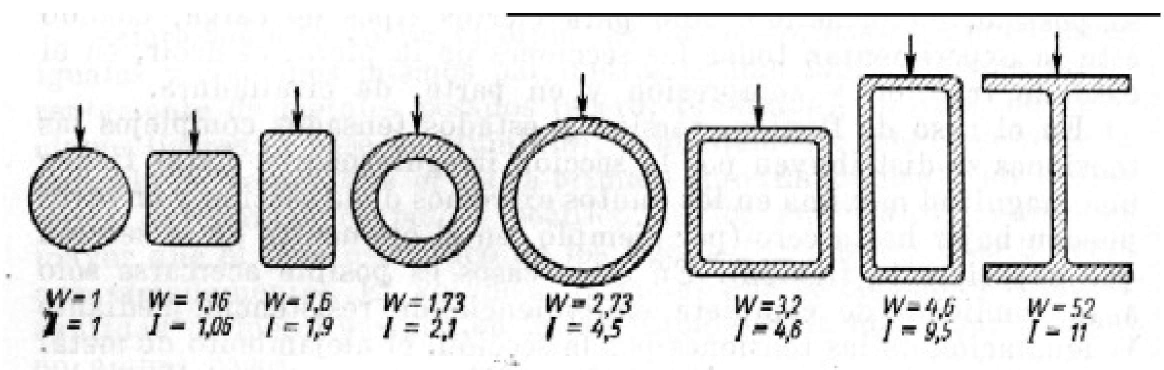
Esta técnica da origen al principio de tensión equivalente, aplicable a secciones de cualquier forma.

Dado que por lo general, los esfuerzos establecen una distribución de tensiones crcientes hacia la periferia de la pieza, las formas más racionales presentan mayor distribución de masa en la periferia, rigidez y resistencia mecánica.

A continuación puede verse esta ventaja en una serie de perfiles de igual área (por lo consiguiente, con igual peso por metro lineal), donde puede observarse la variación del momento resistente y el radio de giro baricéntrico.



Reparto de las tensiones en las sección de las piezas maciza y huecas cilíndricas



Momento de resistencia W y momento de inercia i de perfiles huecos y macizos con igual área de sección (caso de flexión)

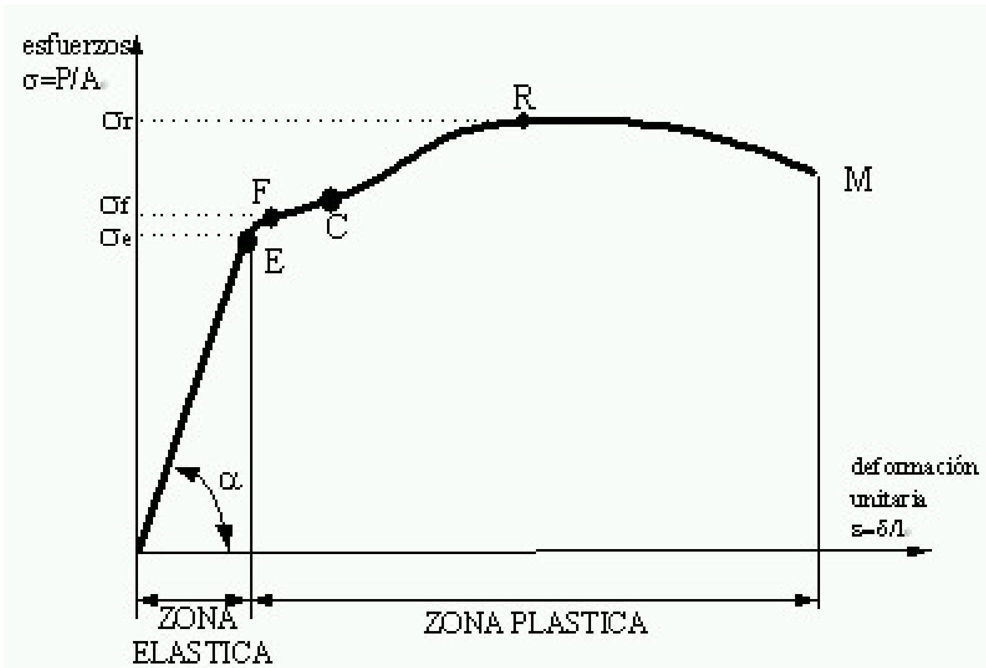
II- Criterios generales de cálculo

1) Relación carga deformación

En virtud de que los cuerpos son sometidos a fuerzas exteriores, se deforman. Las deformaciones dependen del tipo de material del cual estén fabricadas las piezas.

La forma en que los materiales varían dimensionalmente con el esfuerzo, se realizan con máquinas que aplican cargas progresivas y registran las deformaciones obtenidas.

A continuación se muestra un gráfico característico de cómo varía dimensionalmente un acero dúctil ante la aplicación de carga.



El gráfico representa, simplificadamente, tres zonas:

A) **zona de comportamiento elástico (O – E)**: es una zona donde a cada esfuerzo aplicado le corresponde una deformación proporcional, con la particularidad de que, retirada la carga, el material vuelve a su longitud inicial, es decir, el material se comporta en forma perfectamente elástica. El valor E corresponde al límite elástico de la tensión del material.

B) **zona de fluencia (E- C)**: incluida en la zona plástica, en esta área, una vez pasado el límite elástico, también llamado de proporcionalidad, las deformaciones se acentúan aún sin que aumente el valor de la carga, registrándose deformaciones permanentes, aunque permitiéndole al material, seguir soportando esfuerzos, hasta llegar al punto C en el que la carga provoca tracción, punto al que se llama límite de fluencia.

C) **zona de deformación plástica (C-M)**: en esta zona el material sólo registra deformaciones permanentes, alcanzando en el punto R la máxima tensión y en el M, la tensión de rotura del material.

2) Ley de Hooke

De lo visto en el punto anterior es fácilmente deducible que el dimensionamiento de piezas debe efectuarse dentro de la zona A o zona elástica, puesto que aseguraremos que una vez retirada la carga, la pieza no sólo no colapsará, sino que recuperará su dimensión y forma inicial.

La ley de Hooke establece matemáticamente la proporcionalidad registrada en esta zona.

Al deformar la pieza por acción de la carga se elongará un ê l, definiendo al alargamiento específico como $\varepsilon = \frac{ê\,l}{l}$.

Experimentalmente se demuestra que para cada tipo de material existe una constante de proporcionalidad entre la tensión y el alargamiento llamado de elasticidad longitudinal E o módulo de Young, entonces

Ley de Hooke

$$E = \frac{\bullet}{\bullet}$$

Para el acero se adopta E = 2100000 gk/cm^2.

Por lo tanto, la Ley de Hooke se cumple cuando las deformaciones son rigurosamente proporcionales a las cargas que las originan.

3) Selección de coeficientes de regularidad

Las tensiones de límite de proporcionalidad y carga se obtienen por ensayos de laboratorio, con lo cual son valores representativos, pero no fehacientes del material utilizado para la construcción de la pieza.

Dado que aparecen factores como método de elaboración, homogeneidad, fallas ocultas, influencias técnicas, entre otros, que obligan a utilizar un valor corregido del arrojado por el ensayo.

Se suman a esto, otros factores generadores de fatiga como la variabilidad de la carga.

Para absorber estos elementos, se adopta un coeficiente de seguridad **C** que afecta directamente. La expresión de tensión de trabajo, denominada **tensión admisible** siendo

$$\bullet_{max} = \frac{N_{max}}{S}$$

$$\bullet_{adm} = \frac{\bullet_{max}}{C}$$

C depende del tipo de construcción y de la naturaleza de los materiales. En el caso de los metales, lo habitual es adoptar valores de **C** entre 3 y 7. Para componentes mecánicos bajo la influencia de cargas dinámicas variables y de alto compromiso por seguridad, pueden adoptarse valores más altos. Lo lógico y comúnmente adoptado es el triple del valor C cuando las cargas varían cíclicamente entre cero y un máximo.

III- Definición conceptual y cálculo para piezas sometidas a esfuerzos simples

Al estudiar una pieza y cómo está cargada, hacemos referencia a esfuerzos simples cuando el esfuerzo preponderante a dimensionar es único. En esta categoría analizaremos los siguientes esfuerzos simples:

- tracción
- compresión
- corte
- flexión
- torsión

A su vez, los problemas de resistencia de materiales pueden agruparse en dos tipos:

§ De dimensionamiento: cuando la selección buscada se refiere a la determinación de las dimensiones que deben asignarse a la sección de una pieza para que pueda resistir con cierta seguridad, las cargas actuales sobre ella.

§ De verificación: cuando las dimensiones de las piezas están dadas y se trata de comprobar si las tensiones de la sección más comprometida están por debajo de la tensión admisible, para el material de la pieza.

En resumen, matemáticamente, según sea el caso:

Para dimensionamiento

$$V\,(d) = \frac{V\,(esf)}{\bullet_{\,adm}}$$

V (d) = variable que involucra la dimensión

V (esf) = variable que involucra el esfuerzo

• adm = tensión admisible del material

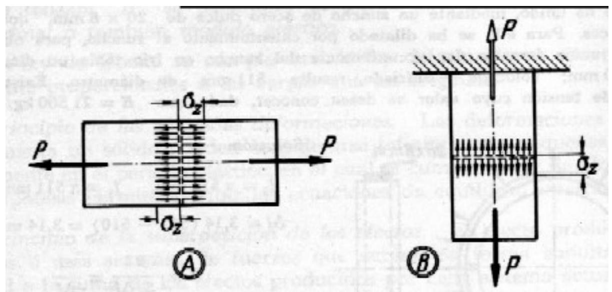
Para verificación

$$\bullet_{\,adm} > \frac{V\,(esf)}{V\,(d)}$$

1) Tracción

Se dice que una pieza está sometida a la tracción, cuando dos fuerzas iguales y contrarias actúan en el eje longitudinal de la misma.

La fuerza exterior aplicada crea en una sección normal una carga unitaria que se supone uniformemente repartida. El material reacciona en la misma sección con una tensión específica equivalente y contraria



§ Cálculo de piezas sometidas a tracción

Haciendo referencia a la definición general, la relación a utilizar para dimensionar una pieza a la tracción es:

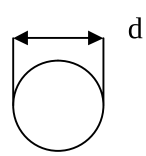
$$S = \frac{P}{\bullet_{adm}}$$

S = sección de la pieza (cm^2)

P = carga de tracción (kg)

$\bullet_{adm}$ = tensión admisible del material (kg/ cm$^{2)}$

Para el caso de secciones circulares

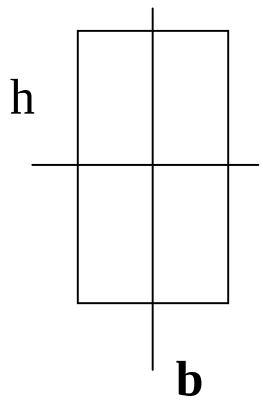


$$S = \frac{\Pi\ d^2}{4}$$

Reemplazando en la fórmula anterior, resulta

$$d = \sqrt{\frac{4\,P}{\Pi \;\bullet_{adm}}}$$

Si la sección fuera rectangular y h = 2b



$$S = b\,h = b\,2b = 2b^2$$

$$b = \sqrt{\frac{P}{2 \;\bullet_{adm}}}$$

Si se debiera efectuar una verificación, deberían relacionarse los mismos parámetros de manera tal de satisfacer la siguiente relación:

$$\bullet_{adm} > \frac{P}{S}$$

Dado que una pieza sometida a tracción se elonga, puede calcularse el alargamiento específico de rotura como:

$$\delta\% = \frac{l - l_0}{l_0} \; 100$$

δ = alargamiento especifico de rotura

l_0 = longitud inicial de la pieza descargada

l = longitud inicial de la pieza cargada

Cuando las piezas son de elevada dimensión, a la carga de tracción debe sumársele el peso propio de la misma, de manera de definir a P como:

$$P = P_1 + Q$$

P = carga total de tracción

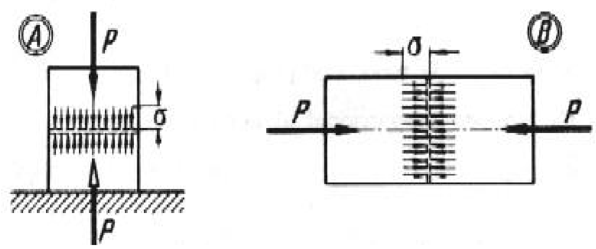
P_1 = carga de tracción

Q = peso de la pieza

2) Compresión

Se dice que un cuerpo está sometido a la compresión cuando dos fuerzas axiales en alineación coincidente y sentidos encontrados, tienden a aplastar dicho cuerpo, tratando de acercar las secciones opuestas. Existe un estado de equilibrio entre las fuerzas exteriores y la tensión específica de compresión que genera el cuerpo como reacción.

La compresión es el efecto contrario a la tracción y conduce a resultados semejantes en los materiales metálicos cuando la longitud del cuerpo no es excesiva respecto de las dimensiones transversales de la sección perpendicular al eje del cuerpo, ya que, de lo contrario, aparece el efecto llamado pandeo.



Al igual que en la tracción, le ley que se utiliza para el dimensionamiento, responde a la ley de proporcionalidad, de manera que vale la misma fórmula que para tracción.

En el caso de la compresión, es necesario además del dimensionamiento de la sección, la verificación de la presión específica.

La limitación de este valor se sustenta en:

$$P = E * S * \frac{\bullet\, l}{l}$$

P = carga
E = módulo de elasticidad
S = sección
• l = acortamiento producido
l = longitud inicial

de manera que $$\bullet = \frac{\bullet\, l}{l}$$

• = acortamiento específico

$$\bullet = E * \bullet$$

con lo que $$P = S * \bullet$$

Afectando la carga o la tensión por los coeficientes de seguridad correspondiente, se obtiene

$$S = \frac{P}{\bullet\ \mathrm{adm}}$$

- la resistencia del material de apoyo.
- la necesidad de mantener la cuña de lubricación.
- la necesidad de minimizar elevación de temperatura del área de contacto.

En la siguiente tabla se indican los valores recomendados, según sea el caso.

Bach propone, en kg/cm^2, los siguientes valores para máquinas:

p =150 para ejes de acero templado sobre soporte de acero;
p = 90 para ejes de acero templado sobre soporte de bronce;
p = 60 para ejes de acero templado sobre soporte de metal blanco;
p = 30-40 para ejes de acero dulce sobre soporte de metal blanco;
p = 25 para ejes de acero dulce sobre soporte de fundición gris;
p = 80-130 para botón de manivela de motores;
p = 100-180 para botón de manivela de locomotoras;
p = 70-120 para pernos de pistón en motores de combustión;
p = 150-180 para pernos de pistón de locomotoras.

Además, y siempre en kg/cm^2, se aconseja:

p = 2-5 para patín de cruceta en máquinas de vapor; p ^ 10 para patín de cruceta en locomotoras.

En construcciones metálicas, la presión admisible en los apoyos es, en kg/cm^2:

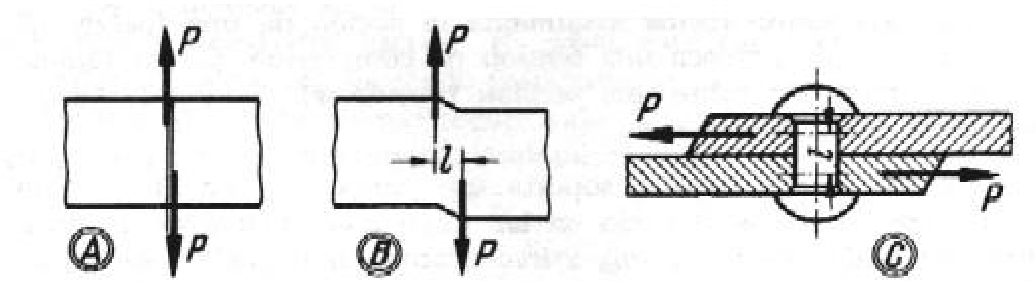
p = 5 000 para rodillos sobre placas de deslizamiento de fundición de hierro;
p = 6 500 para rodillos sobre placas de deslizamiento de acero dulce Siemens;
p = 9 500 para rodillos sobre placas de deslizamiento de acero forjado.

Esta presión se admite cuando los apoyos están formados por uno o dos rodillos que hacen contacto sobre la placa con una de sus generatrices.

3) Corte

Se denomina esfuerzo de corte, a la acción resultante de una fuerza que tiende a desplazar, una sobre otra, a dos secciones paralelas consecutivas e infinitamente próximas entre si.

El corte puede darse tanto en el sentido vertical como en el horizontal.



En el primer caso se habla de tronzado y en el segundo de resbalamiento o corte deslizante.

La experiencia indica que la resistencia de rotura al corte para barras de sección cilíndrica de acero, es de aproximadamente 4/5 de la resistencia de rotura por tracción, similar proporción puede establecerse para la determinación del límite elástico.

A su vez se comprueba mediante ensayos, que el módulo de elasticidad por corte G o módulo de elasticidad transversal, es:

$$\boxed{G = 2/5\ E}$$

De esta manera, para efectuar el dimensionamiento de una pieza sometida al corte, se utiliza la siguiente expresión:

$$S = \frac{5\,Q\,c}{4 \bullet_{adm}}$$

S = sección de la pieza (cm^2)

c = coeficiente de forma, que tiene en cuenta el momento de inercia de la sección y por ende su diferente comportamiento.

Q= carga de corte (kg)

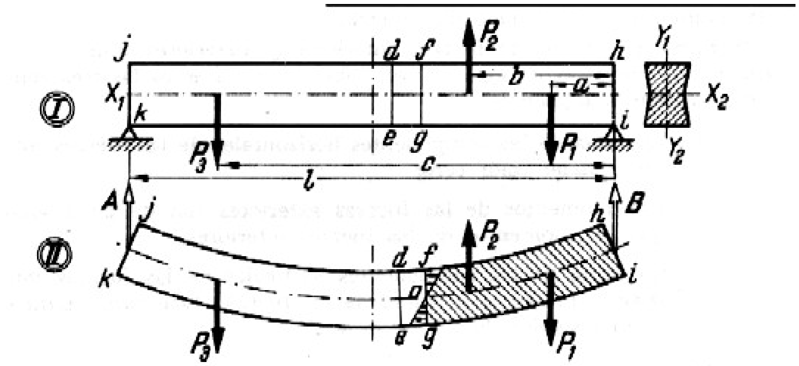
$\bullet_{adm}$ = tensión admisible del material (kg/ cm^2)

Los valores que adopta c, son los siguientes :

Para secciones rectangulares o cuadradas, C = 2/3
Para secciones circulares C = 3/4
Para secciones de corona circular C = 1/2

La determinación de Q en una sección, se hace efectuando la sumatoria de todas las fuerzas situadas a la izquierda de la sección considerada o las de la derecha, cambiadas de signo.

4) Flexión



Una pieza estará sometida a la flexión, cuando esté aplicada sobre ella, una fuerza exteriorde manera que produzca una deformación del eje en forma logitudinal.

El cálculo de los esfuerzos flexores, se realiza sobre elementos genéricos de estudio utilizados en mecánica, llamados vigas. Se consideran a las vigas, como barras prismáticas con un plano longitudinal de simetría.

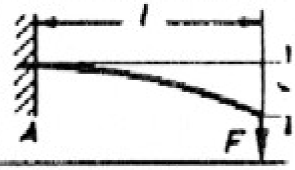
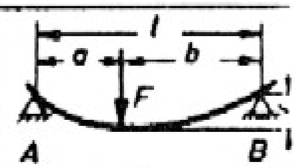
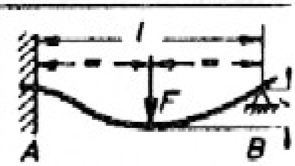
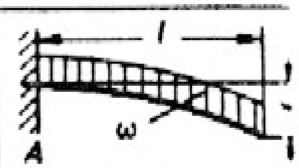
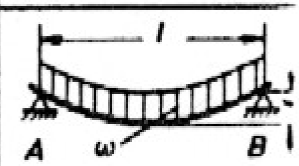
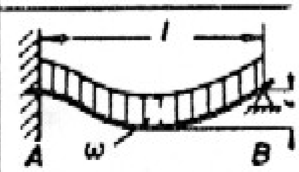
Para el cálculo de los esfuerzos y las deformaciones de las vigas, estas deben encontrarse en equilibrioestático, es decir las fuerzas o los momentos directamnente aplicados junto a las reacciones de los apoyos, deben conformar un sistema en equilibrio estático, para lo cual deben cumplirse las siguientes ecuaciones de equilibrio:

$$\boxed{\begin{array}{c} \Sigma\, \mathbf{F}_{\mathbf{x}} = 0 \\ \Sigma\, \mathbf{F}_{\mathbf{y}} = 0 \\ \Sigma\, \mathbf{M}_{\mathbf{z}} = 0 \end{array}}$$

Aplicando estas ecuaciones, pueden calcularse las reacciones en los apoyos y luego calcular el momento flexor máximo, coincidente con la sección más comprometida, que será la que calcularemos.

A modo de ayuda, se adjunta a continuación una tabla resumenen la que para los distintos tipos de vinculación o fijación de las vigas, laa carga resultante simplificada y considerando a la viga de sección constante, se evidencian los valores de momento flexor máximo, reacciones de vínculos y deflexión máxima o flecha que experimentará la sección de mayor deformación.

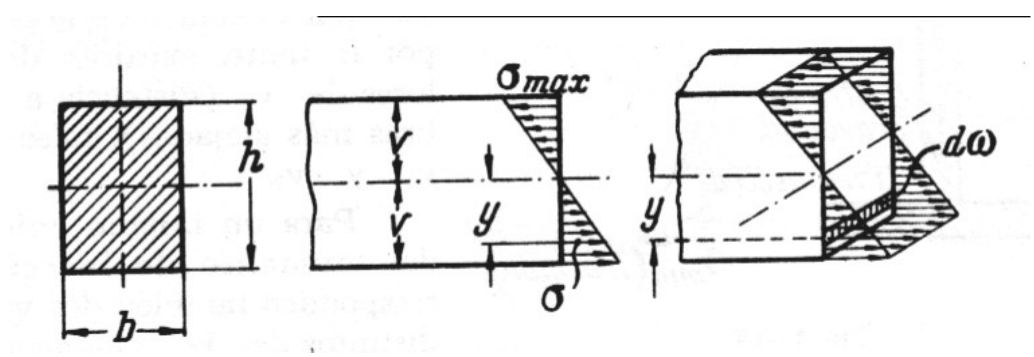
Vigas de sección constante

Momento flexionante máximo M (kg, m)	Reacción en A (kg)	Reacción en B (kg)	Deflexión f (cm)	Tipo de carga
$F \cdot l$	F	-	$\frac{F \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I}$	
$\frac{F \cdot l}{4}$	$\frac{F}{2}$	$\frac{F}{2}$	$\frac{F \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot I}$	
$\frac{F \cdot a \cdot b}{l}$	$\frac{F \cdot b}{l}$	$\frac{F \cdot a}{l}$	$\frac{F \cdot a^2 \cdot b^2}{3 \cdot E \cdot I \cdot l}$	
$\frac{3}{16} F \cdot l$	$\frac{11}{16} F$	$\frac{5}{16} F$	$\frac{7 \cdot F \cdot l^3}{768 \cdot E \cdot I}$	
$\frac{\omega l^2}{2}$	ωl	-	$\frac{\omega l^4}{8 \cdot E \cdot I}$	
$\frac{\omega l^2}{8}$	$\frac{\omega l}{2}$	$\frac{\omega l}{2}$	$\frac{5 \cdot \omega l^4}{384 \cdot E \cdot I}$	
$\frac{\omega l^2}{8}$	$\frac{5}{8} \omega l$	$\frac{3}{8} \omega l$	$\frac{\omega l^4}{185 \cdot E \cdot I}$	

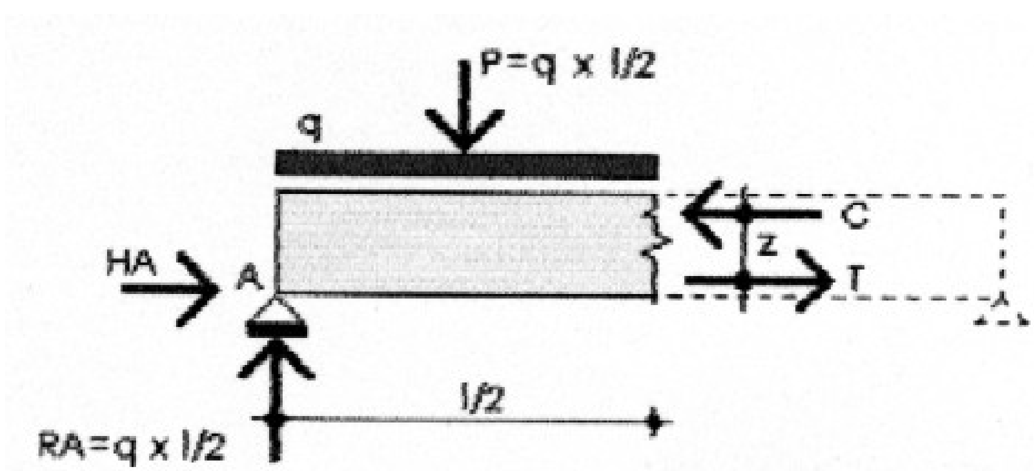
F : Carga unitaria
ω : Carga uniformemente repartida

La deformación que experimentará el sólido al flexionarse, hará que dos secciones que primitivamente se encontraban paralelas, dejen de serlo de manera que para una viga como la de la figura, cuando se cargue, se producirán los siguientes efectos:

1. El eje longitudinal recto X1-X2, se curvará.
2. Las secciones S1 (d-e) y S2 (f-g), si bien seguirán siendo planas, dejarán de ser paralelas, adoptando una posición convergente hacia arriba.
3. Se aprecia entonces la variación de la longitud de las fibras paralelas al eje longitudinal, manifestándose en un acortamiento de aquellas que se encuentran por encima del eje neutro (aquel que no sufre deformación longitudinal alguna) y alargamiento de las que se encuentran por debajo de dicho eje.
4. Esta variación de longitud diferenciada de las fibras, es producto de la acción de los esfuerzos de flexión aplicados, que generan un estado tensional acorde a la deformación, es decir las máximas tensiones positivas o de tracción se verifican en la fibra inferior más alejada del eje neutro y la máxima tensión negativa o de compresión se encuentra en la fibra superio más alejada del eje neutro, lo que se representa en la siguiente figura.



Realizando un corte en el centro de la viga y separando la parte izquierda, esta se encontrará en equilibrio por la acción de las fuerzas exteriores y las que le trasmite la parte derecha, mediante el trabajo de compresión y tracción de las fibras paralelas al eje de la viga.



Donde:

C: resultante de las fuerzas de compresión
T: resultante de las fuerzas de tracción
Z: brazo de palanca de la cupla interna

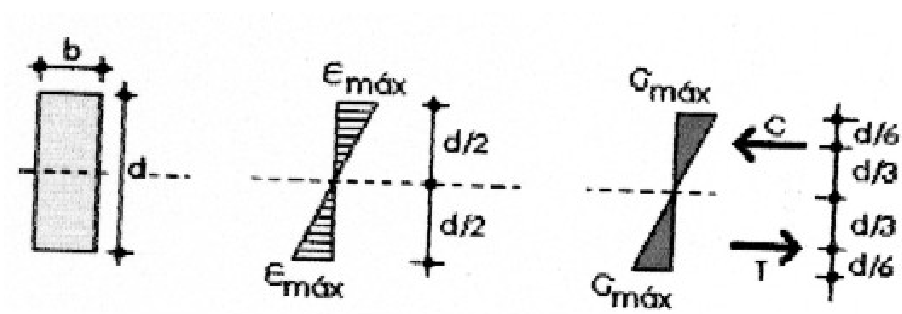
Entonces

C Z = T Z = Mf

$$C = T = \frac{\bullet max}{2}\ b\ \frac{d}{2}$$

donde:

$\frac{\bullet max}{2}$ es la tensión media de las superficies inferior o superior



De la figura se deduce que **Z= 2/3 d** con lo cual

$$Mf = \frac{\bullet max}{2}\ b\ \frac{d}{2}\ \frac{2\ d}{3}$$

$$Mf = \bullet max\ \frac{b\ d^2}{6}$$

donde $W = \frac{b\ d^2}{6}$ que es el módulo resistente para una viga de sección rectangular

El módulo resistente es una característica geométrica de la sección, que se puede definir genéricamente como:

$$W = \frac{J}{I}$$

J (momento de inercia de la sección)   (cm3)

I (radio de giro baricéntrico de la sección)

Esta expresión se cumple en la medida que se verifiquen las siguientes hipótesis:

1) El eje longitudinal de la pieza es recto
2) La resultante de las cargas aplicadas actúa en el plano de simetría de la sección.
3) El material responde a la ley de Hooke.
4) E es igual tanto para las tensiones de tracción como las de compresión.
5) Las tensiones generadas son menores a las de proporcionalidad.

Con lo planteado hasta aquí, puede aseverarse que la tensión de flexión • vale cero en la fibra neutra y aumenta en las fibras más alejadas.

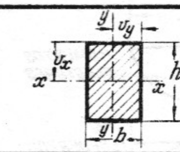
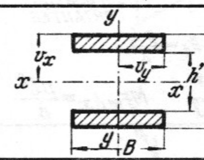
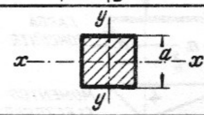
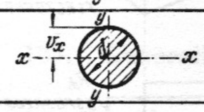
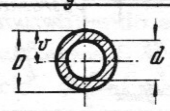
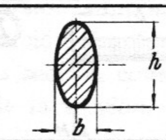
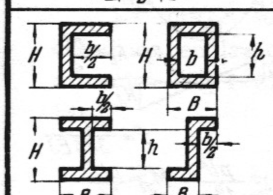
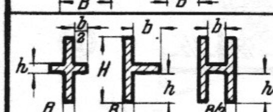
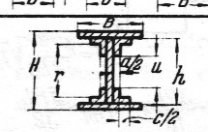
El exceso de material en la vecindad de la línea neutra es contraproducente, puesto que el valor del momento de inercia es, en términos aproximados y simples, el producto de una superficie y el cuadrado de la distancia al baricentro, por lo tanto J aumenta cuadráticamente cuanto más alejada se encuentra esta superficie de la línea neutra.

En consecuencia, a los efectos de resistir flexión, las secciones huecas son más convenientes que las macizas.

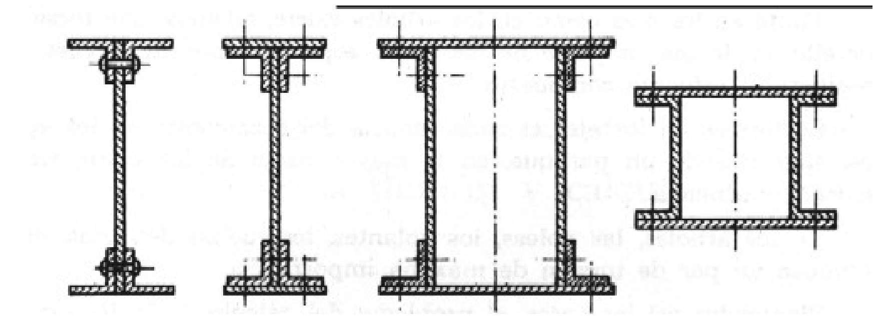
A modo de ejemplificar esto, se adjunta una tabla con distintas secciones y sus correspondientes valores de W **y** J asociados.

MOMENTOS DE INERCIA Y RESISTENTES

De las Secciones más comunes

SECCIONES	SUP.=	DISTANCIA DEL CENTRO DE GRAVEDAD v_x	v_y	MOMENTO DE INERCIA J EJES $x-x$	EJES $y-y$	MOMENTO DE INERCIA POLAR J_p	MOMENTO RESISTENTE W_x	W_y	MOMENTO RESISTENTE POLAR W_p
	$b.h.$	$\frac{h}{2}$	$\frac{b}{2}$	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{b^3h}{12}$	$\frac{bh^3-b^3h}{12}$	$\frac{bh^2}{6}$	$\frac{b^2h}{6}$	$\frac{2}{9}bh^2$
	$b(h-h')$	$\frac{h}{2}$	$\frac{b}{2}$	$\frac{b(h^3-h_1^3)}{12}$	$\frac{(h-h_1)b^3}{12}$	$\frac{b(h^3-h_1^3)+(h-h_1)b^3}{12}$	$\frac{b(h^3-h_1^3)}{6h}$	$\frac{(h-h')b^2}{6}$	$\frac{(h^3-h_1^3)+b^2(h-h')}{6}$
	a^2	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^6}{6}$	$\frac{a^3}{6}$	$\frac{a^3}{6}$	$\frac{a^3}{3}$
	$\frac{\pi d^2}{4}$	$\frac{d}{2}$	$\frac{d}{2}$	$\frac{\pi d^4}{64} \cong 0{,}05d^4$		$\frac{\pi d^4}{64} \cong 0{,}1d^4$	$\frac{\pi d^3}{32} \cong 0{,}1d^3$		$\frac{\pi d^3}{16} \cong 0{,}2d^3$
	$\frac{\pi(D^2-d^2)}{4}$	$\frac{D}{2}$	$\frac{D}{2}$	$\frac{\pi(D^4-d^4)}{64} \cong 0{,}05(D^4-d^4)$		$\frac{\pi(D^4-d^4)}{32} \cong 0{,}1(D^4-d^4)$	$\frac{\pi(D^3-d^3)}{32} \cong 0{,}1(D^3-d^3)$		$\frac{\pi(D^3-d^3)}{16} \cong 0{,}1d^3$
	πbh	$\frac{h}{2}$	$\frac{h}{2}$	$\frac{\pi bh^3}{64}$	$\frac{\pi b^3h}{64}$	$\frac{\pi(bh^3+b^3h)}{64}$	$\frac{\pi bh^2}{32}$	$\frac{\pi b^2h}{32}$	$\pi\frac{(bh^3+b^3h)}{32h}$
	$BH-bh$	$\frac{H}{2}$	—	$\frac{BH^3-bh^3}{12}$		—	$\frac{BH^3-bh^3}{6H}$		—
	$HB-hb$	$\frac{H}{2}$	—	$\frac{BH^3+bh^3}{12}$	—	—	$\frac{BH^3+bh^3}{6H}$	—	—
	$HB-b(e_2+h)$	$e_2=H-e_1$		$J_x=\frac{Be_1^3-bh^3-ae_2^3}{3}$		—	$\frac{J_x}{e_1}$ $\frac{J_x}{e_2}$	—	—
	$2B(H-b)+2c(h-r)+2a(h-u)+h(B-a-c)$	$\frac{H}{2}$	$\frac{B}{2}$	$J_x=\frac{Bh^3-bh^3-cr^3-a^3}{12}$		—	$\frac{2J_x}{H}$	—	—

Cuando se necesitan resistir momentos flexores considerables, se recurre a perfiles metálicos compuestos por perfiles normales como los de la figura siguiente.

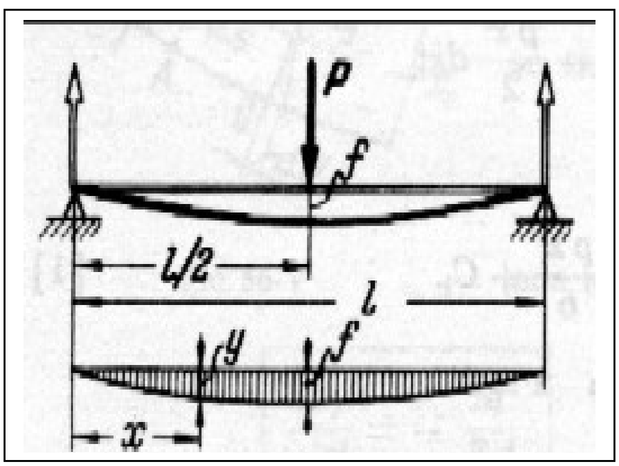


De esta forma se logra como ventaja comparativa, la obtención de la máxima resistencia con el mínimo peso.

El cálculo se realiza por la aplicación del teorema de Steiner, tal como se vio en el desarrollo de momento de inercia.

Cálculo de la elástica de deformación

Repasando un concepto ya analizado en párrafos precedentes, llamamos elástica a la curva correspondiente al eje de una viga, que es idealmente recto (considerándola sin carga ni peso propio) pero que cuando se la carga y aún sólo por propio peso, sufre una deformación . Es importante determinar el radio de curvatura ρ y la flecha máxima f. Para ello, asimilando la viga deformada a un triángulo y operando matemáticamente, se obtienen las expresiones del recuadro.



$$\rho = \frac{E\,J}{M} \qquad\qquad f = \frac{c\,p\,l^4}{E\,J}$$

Donde:

ρ es el radio de curvatura de la línea recta

E es el módulo de elasticidad

J es el momento de inercia de la sección

M es el momento flector máximo

f es la flecha máxima

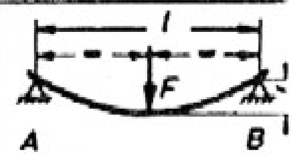
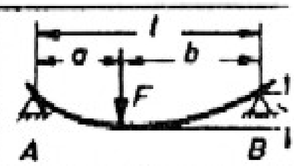
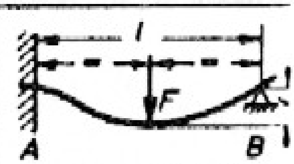
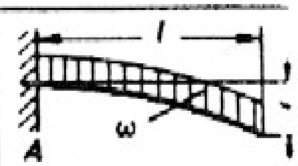
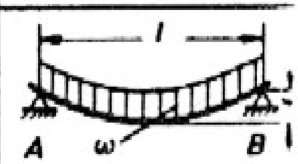
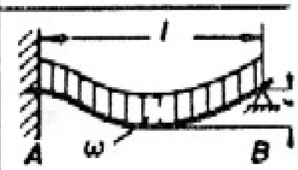
c es un coeficiente que depende del empotramiento, la carga y su ubicación

p es la carga

l es la luz de la viga

En la siguiente tabla se señalan los valores mencionados

Vigas de sección constante

Momento flexionante máximo M (kg, m)	Reacción en A (kg_f)	Reacción en B (kg_f)	Deflexión f (cm)	Tipo de carga
$F \cdot l$	F	-	$\frac{F \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I}$	
$\frac{F \cdot l}{4}$	$\frac{F}{2}$	$\frac{F}{2}$	$\frac{F \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot I}$	
$\frac{F \cdot a \cdot b}{l}$	$\frac{F \cdot b}{l}$	$\frac{F \cdot a}{l}$	$\frac{F \cdot a^2 \cdot b^2}{3 \cdot E \cdot I \cdot l}$	
$\frac{3}{16} F \cdot l$	$\frac{11}{16} F$	$\frac{5}{16} F$	$\frac{7 \cdot F \cdot l^3}{768 \cdot E \cdot I}$	
$\frac{\omega \, l^2}{2}$	$\omega \, l$	-	$\frac{\omega \, l^4}{8 \cdot E \cdot I}$	
$\frac{\omega \, l^2}{8}$	$\frac{\omega \, l}{2}$	$\frac{\omega \, l}{2}$	$\frac{5 \cdot \omega \, l^4}{384 \cdot E \cdot I}$	
$\frac{\omega \, l^2}{8}$	$\frac{5}{8} \omega \, l$	$\frac{3}{8} \omega \, l$	$\frac{\omega \, l^4}{185 \cdot E \cdot I}$	

F : Carga unitaria

ω : Carga uniformemente repartida

5) Torsión

Antes de tratar el tema cabe aclarar la diferencia conceptual que existe entre árbol y eje.

Eje: es el medio que se utiliza para sostener un determinado elemento de máquina permitiéndole que gire alrededor suyo.

Árbol: están preparados para transmitir momentos torsores a distancia.

Se dice que una barra cilíndrica está sometida a la torsión cuando al mantener uno de sus extremos físicos un par de fuerzas, la barra se retuerce en forma de tirabuzón, lo que se manifestaría si trazáramos una línea coincidente con una línea generatriz antes de someterla al par torsor, luego de la aplicación de la carga la generatriz (inicialmente recta) adoptaría la traza de una hélice.

Siendo el material idealmente elástico, las tensiones interiores equilibran dicho esfuerzo provocado por el par.

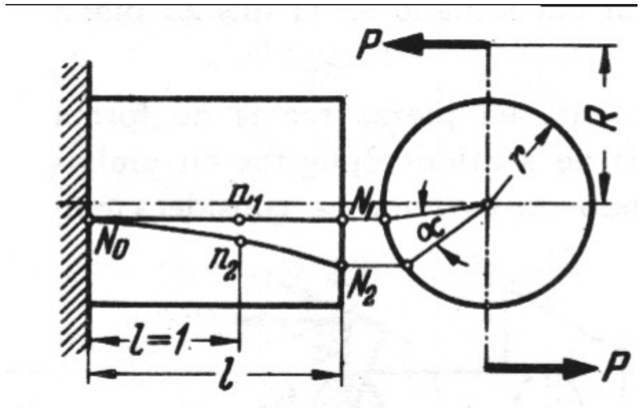
La torsión se caracteriza por lo siguiente:

- cada sección transversal paralela ha girado en su plano alrededor del eje longitudinal
- el esfuerzo de torsión es proporcional a la sección
- es también proporcional al ángulo de torsión
- es proporcional a la distancia entre la fibra longitudinal considerada y el eje
- es inversamente proporcional a la distancia que separa la sección considerada de la sección de encastre

A su vez, producida la torsión, se constata que:

- el eje geométrico sigue siendo recto
- todas las generatrices y fibras longitudinales se han convertido en hélices salvo el eje geométrico
- todas las secciones planas y perpendiculares al eje geométrico lo siguen siendo salvo que han girado

Si consideramos el esquema de la figura siguiente:



La deformación máxima se produce en la base derecha de la pieza considerada y viene definida por el ángulo de giro • , determinado por el giro sufrido del punto **N,** desde **N1** a **N2** denominado ángulo de torsión, que es el ángulo de giro total entre los extremos de la barra cilíndrica.

Esta deformación está dada por un desplazamiento relativo entre cada dos secciones próximas entre sí, sometidas a tensiones de corte, cuyas direcciones están contenidas en el plano determinado por las secciones rectas de la pieza.

Si relacionamos el arco establecido por el desplazamiento **N1 N2** con el ángulo **• ,** el radio **R** de la barra y la longitud **L**, resultaría

$$N1\ N2 = \frac{\mathbf{R} \bullet}{\mathbf{L}}$$

Como la tensión transversal está dada por

$$\tau = \mathbf{G\ N1\ N2}$$

Entonces,

$$\tau = \frac{\mathbf{G\ R} \bullet}{\mathbf{L}}$$

Alcanzando su valor máximo cuando **R** sea máximo.

Por otra parte, el momento torsor que es quien provoca la deformación total de la pieza es el momento total producido por las fuerzas cortantes en toda la sección. Por lo tanto, y luego de operar la función integral que lo representa, puede expresarse como

$$\mathbf{Mt} = \frac{\bullet\ \mathbf{R}^4}{\mathbf{2}}\ \frac{\bullet\ \ \mathbf{G}}{\mathbf{L}}$$

Estableciendo la relación entre la tensión máxima tangencial y el momento torsor aplicado se obtiene

$$Tmax = \frac{2\ Mt}{\bullet\ R^3}$$

Siendo el momento de inercia polar

$$Jp = \frac{S\ R^2}{2}$$

$$Tmax = \frac{Mt\ R}{Jp}$$

Llamamos

$$\bullet = \frac{Jp}{R}$$

Que es el módulo resistente polar de la sección.

De igual forma puede obtenerse la expresión para el ángulo de torsión • .

$$\bullet = \frac{Mt\ L}{G\ Jp}$$

Resumiendo, para efectuar el dimensionamiento de un árbol sometido a torsión primero es necesario conocer el momento torsor aplicado, utilizando la siguiente fórmula

$$Mt = 71620\ \frac{N}{n}\ (Kgcm)$$

donde **N** es igual a potencia y **n** es igual a Rpm.

Asumiendo una forma de la sección y eligiendo un material cuya Tadm conocemos, despejamos la dimensión de • ya que

$$\bullet = \frac{\mathbf{Mt}}{\text{Tadm.}}$$

A continuación se resumen en una tabla los valores usualmente utilizados.

Torsión

Esfuerzo de torsión

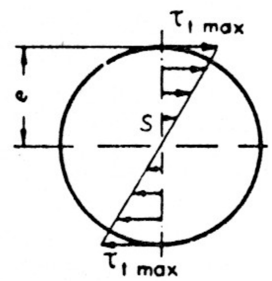
$$\tau_t = \frac{M_t}{S_t} \leq \tau_{pt} \qquad [kg/cm^2]$$

Momento torsionante

$$M_t = 716,2 \cdot 10^3 \frac{P}{n} \qquad [kg, cm]$$

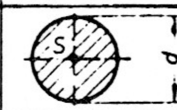
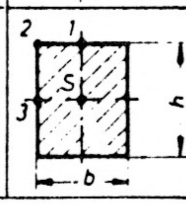
Momento resistente a la torsión

$$W_t = \frac{I_t}{e} \qquad [cm^3]$$



e : Distancia de la partícula en la periferia, a partir del centroide S.

Momento de inercia y resistentes referidos a S, y esfuerzos de torsión máximos.

Momento polar de inercia I_p [cm^4]	Momento resistente S_t [cm^3]	Esf. máx. a la torsión τ_t [kg/mm^2]	Sección transversal A
$\frac{\pi \cdot d^4}{32}$	$\frac{\pi \cdot d^3}{16}$	$\approx \frac{5,1 \cdot M_t}{d^3}$	
$\frac{\pi}{32}(D^4 - d^4)$	$\frac{\pi}{16} \cdot \frac{D^4 - d^4}{D}$	$\approx \frac{5,1 \cdot M_t}{D^3} \cdot \frac{1}{1-\delta^4}$	
	en 1: $\frac{2}{9}\, b \cdot h^2$; en 3: $\frac{2}{9}\, b^2 \cdot h$	en 1: $\frac{9 \cdot M_t}{2 \cdot b \cdot h^2}$; en 2: 0; en 3: $\frac{9 \cdot M_t}{2 \cdot b^2 \cdot h}$	

δ-Tabla para secciones transversales de anillos

$\delta = \frac{d}{D}$	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
$\frac{1}{1-\delta^4}$	1,0667	1,1489	1,3159	1,6194	2,9136	5,3908

P : Potencia en [CV] | n : Revoluciones por minuto
σ_{pt}: Esfuerzo permisible a la torsión kg/cm^2 (ver Z 14)

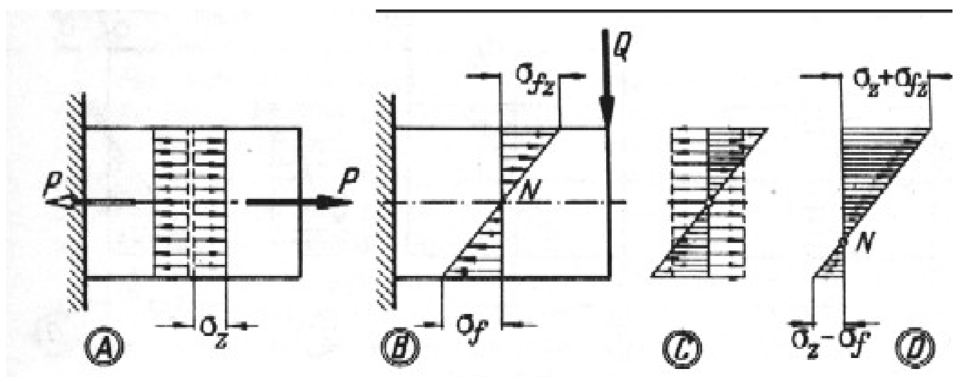
IV- Definición conceptual y cálculo para piezas sometidas a esfuerzos compuestos

1) Tracción y flexión

Si sobre un sólido supuesto empotrado por uno de sus extremos, actúa una carga P axial, esta carga produce tracción, generando una carga tensional interna •1.

Si sobre este mismo sólido, actúa en su extremo libre una carga Q produciendo flexión, generará en el sólido una tensión de tracción en la mitad superior y una de compresión en la mitad inferior, a la que llamamos •2, la que valdría cero en el eje neutro.

La superposición de ambos efectos, da como resultado una tensión variables resultante de la forma de la siguiente figura.



Como puede observarse, se dan dos condiciones:

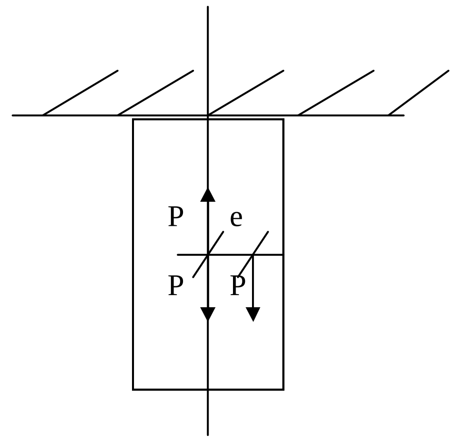
1. El valor máximo de la tensión resultante se da para la fibra superior.
2. Se produce un desplazamiento del eje neutro hacia abajo, respecto al original.

Un caso similar se da para la combinación de compresión y flexión simultáneas, salvo que las condiciones resultantes son:

1. El valor mínimo de la tensión resultante se da en la fibra superior.
2. Se produce un desplazamiento hacia arriba del eje neutro, respecto al original.

El efecto de tracción o compresión y flexión sumados, suele producirse al aplicar una carga de forma no colineal con el eje de la pieza, sino apartada de este, con lo cual se produce tracción o compresión y un para asociado l desplazamiento de dicho eje.

Gráficamente



Cálculo de secciones sometidas a este esfuerzo compuesto

La fuerza P, generará sobre la sección S una tensión de tracción $\bullet_1$, que valdrá:

$$\bullet_1 = \frac{P}{S}$$

A su vez, el momento flector que actuará sobre la pieza, tendrá un valor de:

$$Mf = P\ e$$

Y la tensión generada por dicho momento, será:

$$\bullet_2 = \frac{Mf}{W}$$

Con lo cual la tensión resultante será:

$$\bullet\ r = \bullet_1 + \bullet_2$$

$$\bullet\ r = \frac{P}{S} + \frac{P\ e}{W}$$ o genéricamente

$$\bullet\ \text{adm.} = \frac{P}{S} + \frac{Mf}{W}$$

2) Flexión y torsión

Este caso de esfuerzo compuesto se presenta frecuentemente en mecánica. El sólido en general cilíndrico y de diámetro reducido respecto a su longitud, está apoyado en cojinetes. Entre las cargas que producen la flexión, figura el peso propio de la pieza y el de las poleas o volantes, así como también las reacciones de engranajes o tensiones originadas por el tiro de correas o cadenas. La torsión está provocada por el par entrante a través de la polea motora.

Por lo anterior, podemos decir que si un cuerpo está sometido simultáneamente a un momento de flexión y a otro de torsión, el primero dará origen a tensiones normales de tracción y compresión, mientras que el segundo originará tensiones tangenciales equivalentes a las de un esfuerzo de corte.

Estos esfuerzos elásticos no pueden sumarse, dado que son perpendiculares entre si, siendo que las primeras se encuentran contenidas en un plano que pasa por el eje longitudinal de la pieza, mientras que la segunda en un plano de la sección normal a este.

Cálculo de secciones sometidas a este esfuerzo compuesto

Las diferentes hipótesis que se enunciarán a continuación para poder dimensionar una pieza a la flexo - torsión, se basan en determinar un momento flexor ideal o momento flexor equivalente, que surja como composición vectorial de ambos, de manera de que su aplicación genere flexión pura y se lo utilice para un cálculo simple y reducido de dimensionamiento a ese único esfuerzo, tal como se vio en el dimensionamiento de piezas bajo cargas de flexión pura.

Los momentos ideales Mi que se buscan calcular, pueden determinarse usando las diferentes hipótesis que se han desarrollado.

1. Según la hipótesis de Lamé , Clapeyron, Maxwel.

$$\boxed{Mi = 0,5\ (Mf + \sqrt{Mf^{2} + Mt^{2}}\ )}$$

2. Según la hipótesis de Mariotte, Saint Venant, Bach

$$\boxed{Mi = 0,35\ (Mf + 0.65\ \sqrt{Mf^{2} + 4\ Mt^{2}}\ )}$$

3. Según la hipótesis de Mohr y Guest

$$\boxed{Mi = \sqrt{Mf^{2} + 4\ Mt^{2}}}$$

El desarrollo de estas tres hipótesis se sustentan a su vez en dos premisas adicionales en las que se establece:

1- Que la tensión normal máxima no debe superar el límite de proporcionalidad, lo que matemáticamente se expresa como:

$$\boxed{\bullet\ prop > 0{,}5\ (\ \bullet\ +\sqrt{\bullet^{2} + 4\ \mathrm{T}^{2}}\ )}$$

2- Que para que el alargamiento específico no supere al tolerado en la zona elástica, debe cumplirse que:

$$\boxed{\bullet\ prop > 0{,}35\ (\ \bullet\ +\ 0{,}65\ \sqrt{\bullet^{2} + 4\ \mathrm{T}^{2}}\ )}$$

En la práctica para el cálculo suele utilizarse más comúnmente la fórmula de Bach.
Con el valor de Mi hallado por medio de esta hipótesis, se efectúa el dimensionamiento por flexión, utilizando la siguiente fórmula:

$$\boxed{\bullet\ \mathrm{adm} > \frac{Mi}{W}}$$

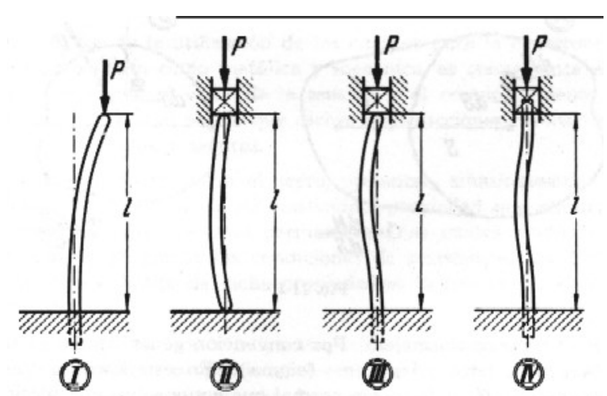
Donde, según se trate de barras macizas o árboles, W vale:

$$W = \frac{\Pi\, d^3}{32} \qquad \text{para barras macizas}$$

$$W = \frac{\Pi\, D^3}{32}\left(1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right) \qquad \text{para árboles huecos}$$

3) Pandeo o flexión lateral

Cuando se aplican cargas de compresión en el extremo de barras en las que su relación entre sección y longitud es muy pequeña, se produce pandeo.
Las deformaciones o apartamiento lateral de la barra de su eje longitudinal, dependen de su esbeltez (**λ**) y del tipo de empotramiento o vinculación de la barra.
A continuación se representan los cuatro tipos de empotramientos básicos establecidos como modelos de estudio por el matemático Euler.

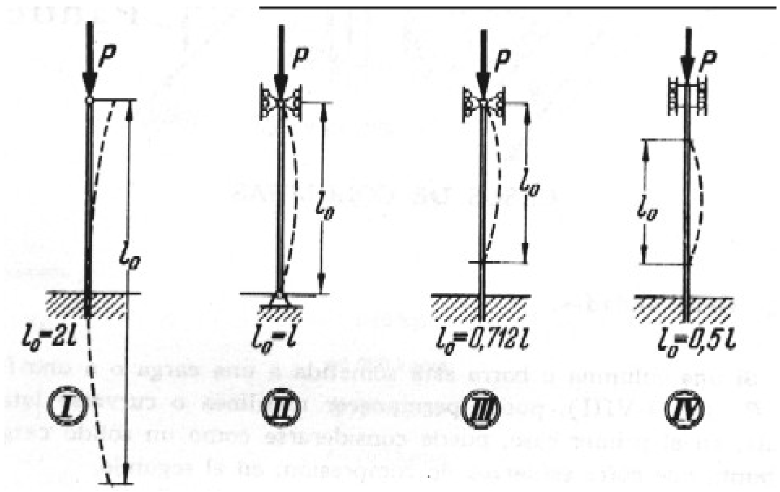


I- Un extremo empotrado y el otro libre
II- Ambos extremos articulados
III- Un extremo empotrado y el otro articulado
IV- Ambos extremos empotrados

Es importante aclara que puede originarse pandeo, aún para valores de carga menores al límite de proporcionalidad, ya que en este caso no se trata de una carga que atente contra la resistencia mecánica, sino sobre la rigidez estructural. Por lo tanto se denomina pandeo elástico, cuando suprimida la carga, la deformación lateral desaparece.

La carga P bajo la cual se manifiesta la curvatura característica del pandeo, se la denomina carga de pandeo o carga crítica de pandeo y se la denomina con la letra **K.**

Según sea el caso de empotramiento planteado de los vistos en el párrafo anterior, se establece la dimensión lo, que es la distancia entre dos puntos de inflexión consecutivos de la pieza deformada, denominada longitud de pandeo.



Se determina entonces, el coeficiente de empotramiento C, que según sea el caso, adopta los siguientes valores:

$\lambda = \frac{l}{i}$ esbeltez

K = carga crítica de pandeo

lo = longitud de pandeo

C = $\frac{lo}{L}$ coeficiente de empotramiento

Caso	C
I	2
II	1
III	0.707
IV	0.5

Cálculo de piezas sometidas a pandeo

Las fórmulas de Euler establecidas permiten calcular para cada tipo de empotramiento cual es la carga crítica de pandeo, de manera tal que superado ese valor de carga K, se producirá pandeo sobre la barra. Con este criterio, puede decirse que en general. En el cálculo de elementos de máquina, el pandeo es un esfuerzo que no se lo utiliza con fines dimensionales, sino de verificación y en base a su resultado, se modifica la geometría adoptada.

Fórmula de Euler

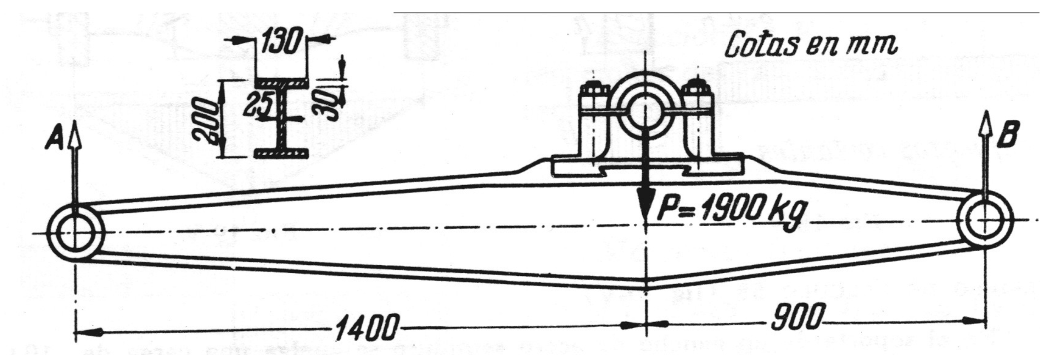
Caso	Valor de K
I	$K = \frac{\pi^2 E J}{4 l^2}$
II	$K = \frac{\pi^2 E J}{l^2}$
III	$K = \frac{\pi^2 E J}{0{,}5l^2}$
IV	$K = \frac{\pi^2 E J}{0.25\, l^2}$

V- Cálculo de aplicación de piezas clásicas utilizadas en construcciones mecánicas

1) Cálculo de vigas

Los pasos que deben seguirse para el dimensionamiento de una viga son:

a) Reducir el estado de cargas de la pieza a un esquema simplificado.



b) Calcular las reacciones de vínculo de la viga.
c) Calcular los momentos flexores en las secciones características
d) Si la carga fuese móvil, establecer la condición más desfavorable para que produzca el momento flexor máximo.
e) Establecer los esfuerzos de corte máximo.
f) Dimensionar a la flexión adoptando una sección de forma y un material , tal como se vio en el capítulo de flexión, tal que se cumpla

$$\bullet_{adm} > \frac{Mfmax}{W}$$

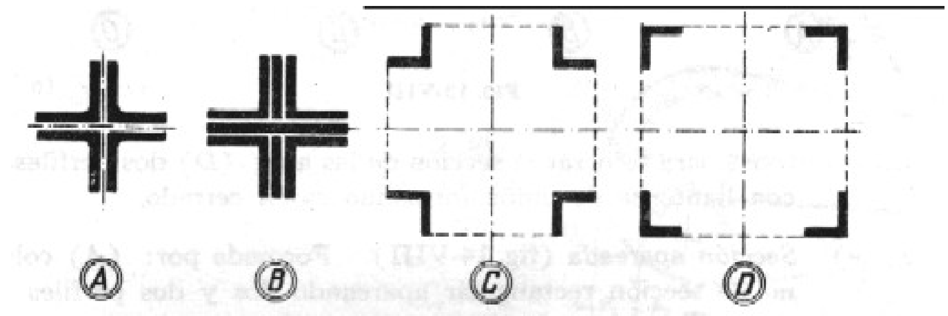
g) Si el dimensionamiento requiriera de una sección muy grande, se debe elegir otra sección de mayor módulo resistente y recalcular.
h) Verificar la sección al corte.
i) Calcular la elástica y verificar si es aceptable para el máximo momento flexor.
j) Recalcular si las verificaciones no dieran.

2) Cálculo de columnas

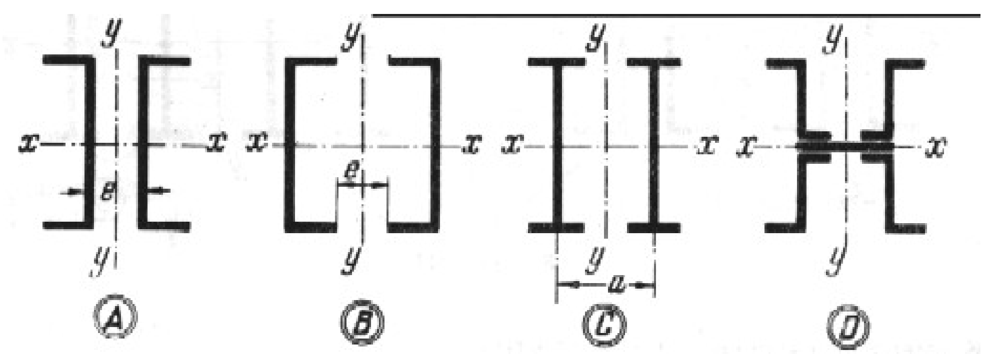
Las columnas son piezas de eje longitudinal coincidente con la dirección de la carga que soportan.

En gral. Las columnas pueden ser:

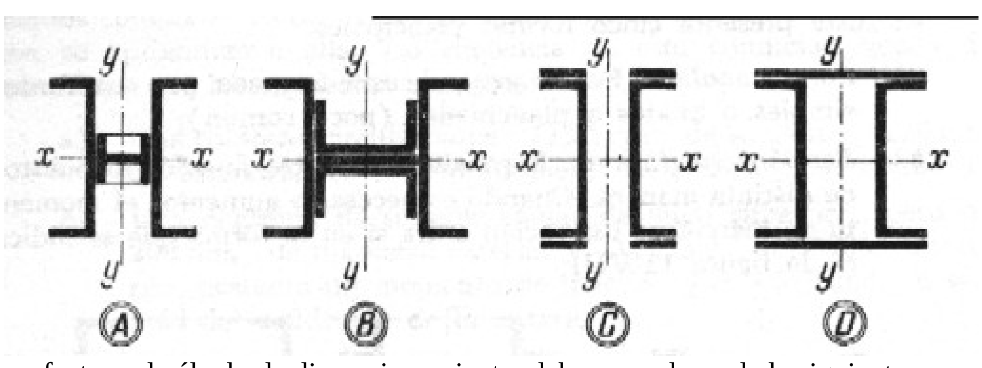
a) Anular: de sección de corona circular
b) Cruciforme: formada por cuatro perfiles de ángulo dispuestos de diferente manera. A medida que es necesario aumentar el momento de inercia, se alejan entre si.



c) Cajón: formada por dos perfiles U o doble T enfrentados, o armados con chapas.



d) Cajón combinado: Formada por perfiles U y doble T o con chapas también.



Para efectuar el cálculo de dimensionamiento, debe procederse de la siguiente manera:

a) Determinar la carga de compresión.
b) Establecer el momento de inercia resultante de la sección aplicando el teorema de Steiner.
c) Dimensionar a la compresión.
d) Calcular la carga crítica de pandeo y verificar.
e) Recalcular si fuese necesario.

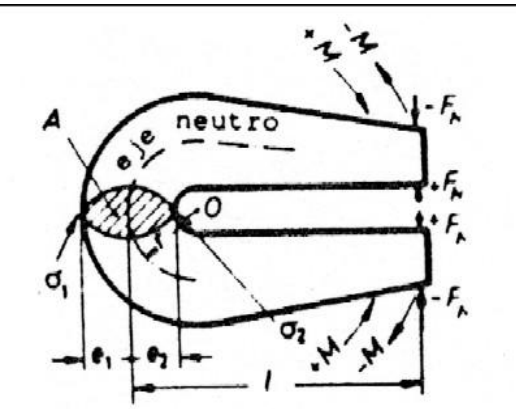
3) Cálculo de árboles

Como se vio al analizar piezas sometidas a esfuerzos combinados, los árboles están sometidos a flexo torsión. Los pasos a seguir para su cálculo son:

e) Determinar el Mt aplicado
f) Determinar las reacciones vínculo.
g) Determinar el Mf max.
h) Determinar el esfuerzo de corte máximo.
i) Determinar el Mi por la fórmula de Bach.
j) Dimensionar a la flexión, adoptando una sección y un material.
k) Verificar la sección al corte.
l) Verificar la elástica
m) Recalcular si las verificaciones arrojaran resultados erróneos.

4) Cálculo de barras curvas

Cuando se trata de dimensionar barras curvas, debe considerarse la aplicación de un esfuerzo combinado de tracción y flexión o compresión y flexión, de manera que si actúa una fuerza P a una distancia l del eje neutro (en su posición más alejada del punto de aplicación de la misma), se obtendrán, dependiendo el sentido de aplicación de la misma, las siguientes expresiones:



$$Mf = P\, l$$

$$\bullet_1 = \frac{P}{S} + \frac{P\, l}{W} < \bullet_{adm}$$

$$\bullet_2 = -\frac{P}{S} + \frac{P\, l}{W} < \bullet_{adm}$$